Problemes

Problemes proposats

- Us recordem els enunciats dels problemes proposats a **SCM/Notícies**/5 (A20, A21, A22) perquè encara sou a temps, durant l'estiu, a enviar-nos les vostres solucions, que es publicaran al proper número de **SCM/Notícies**. També us proposem tres problemes nous (A23, A24, A25). D'aquests i dels que es van plantejar a la fase estatal de la XXXIII Olimpíada, la redacció escollirà les millors solucions rebudes per publicar-les al **SCM/Notícies**/8.

A20. De quantes maneres es pot descompondre un enter positiu n en suma d'enters positius més petits si considerem diferents aquelles sumes que o bé contenen sumands diferents o bé difereixen en l'ordre dels sumands?

A21. Un tauler d'escacs 6×6 s'omple amb fitxes de dòmino (2×1) ben collocades, és a dir, ocupant dos quadradets. Demostreu que sempre és possible tallar el tauler en dues parts mitjançant una línia recta que no talli cap fitxa.

A22. Donat un triangle ABC, tracem les dues bisectrius corresponents als angles A i B. Pel vèrtex C, tracem les paral·leles a cadascuna d'aquestes bisectrius, i anomenem D i E els punts de tall amb elles. Demostreu que si la recta DE és paral·lela al costat AB, el triangle és isòsceles.

A23. A l'illa de Camelot viuen 13 camaleons grisos, 15 de color marró i 17 de color lila. Si dos camaleons de diferent color es troben, canvien simultàniament al tercer color (per exemple, si es troben un camaleó gris i un de marró, tots dos canvien a lila). És possible que tots els camaleons de l'illa tinguin alhora el mateix color?

A24. Demostreu que si x, y, z i n són enters positius i $n \geqslant z$, llavors la igualtat $x^n + y^n = z^n$ no pot donar-se.

A25. Demostreu que el nombre $m(m+1)$ no pot ser la potència d'un enter per cap valor enter de m.

XXXIII Olimpíada Matemàtica. Fase estatal (València, 7 i 8 de març de 1997)

1. Calculeu la suma dels quadrats dels cent primers termes d'una progressió aritmètica, sabent que la suma d'aquests termes és -1 i la suma dels termes de lloc parell és $+1$.

2. Un quadrat de costat 5 unitats es divideix en 25 quadrats unitat mitjançant rectes paral·leles als costats. Sigui A el conjunt dels 16 punts interiors als quadrat que són vèrtexs dels quadrats unitat però que no pertanyen als costats del quadrat inicial. Quin és el nombre més gran de punts d'A que és possible escollir de manera que TRES qualssevol d'ells NO siguin els vèrtexs d'un triangle rectangle isòsceles?

3. Considereu les paràboles $y = x^2 + px + q$ que tallen els eixos de coordenades en tres punts diferents, pels quals es traça una circumferència. Demostreu que totes les circumferències que resulten per tots els valors $p \in \mathbb{R}$ i $q \in \mathbb{R}$ passen per un punt fix i determineu aquest punt.

4. Sigui p un nombre primer. Trobeu tots els nombres $k \in \mathbb{Z}$ de manera que $\sqrt{k^2 - pk}$ sigui un nombre enter.

5. Demostreu que en un quadrilàter convex d'àrea unitat, la suma de les longituds de tots els costats i les diagonals no és més petita que $2(2+\sqrt{2})$.

6. Per tal de donar una volta completa en cotxe a un circuit circular, la quantitat exacta de benzina que es necessita està distribuïda en dipòsits fixes situats en n punts arbitraris, diferents, del circuit. Inicialment el dipòsit del cotxe està buit. Demostreu que sigui quina sigui la distribució del combustible en els dipòsits, sempre existeix un punt de partença a partir del qual es pot donar la volta completa.

Aclariments:

- Se suposa que el consum és uniforme i proporcional a la distància recorreguda.
- El dipòsit del cotxe té capacitat suficient per a contenir tota la gasolina.

A16. Donada l'equació

$$az\bar{z} + bz + c = 0 \qquad (1)$$

on $a, b, c \in \mathbb{C}$ són constants, i $a \neq 0$, discutiu-la segons els valors dels paràmetres i trobeu totes les solucions $z \in \mathbb{C}$.

Solució (La que Antonio Montes, UPC, va enviar amb la proposta del problema). Donada l'equació (1), la seva complexa conjugada també ha de ser certa:

$$\bar{a}\bar{z}z + \bar{b}\bar{z} + \bar{c} = 0 \qquad (2)$$

Si considerem z i $\bar{z}$ com a variables independents posant $\bar{z} = z_1$, resultarà el sistema següent:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} azz_1 + bz + c & = & 0 \\ \bar{a}z_1 z + \bar{b}z_1 + \bar{c} & = & 0 \end{array} \right. \qquad (3)$$

en el ben entès que les solucions de (1) seran solucions de (3), però no necessàriament les solucions de (3) ho són de (1), doncs aquestes han de verificar, a més, la condició $z_1 = \bar{z}$, que, com veurem, no és automàtica, tot i considerar les dues equacions (3).

Per trobar la solució de (3), multipliquem la primera equació per $\bar{a}$ i la segona per a i restem. Obtenim:

$$\bar{a}bz - a\bar{b}z_1 + \bar{a}c - a\bar{c} = 0 \qquad (4)$$

Cas $b = 0$

Si $b = 0$, (4) implica

$$\bar{a}c - a\bar{c} = 0 \qquad (5)$$

Subcas $\bar{a}c - a\bar{c} = 0$

Si es verifica (5), llavors l'equació donada (1) es redueix a $az\bar{z} + c = 0$, i tenint en compte que per (5) la quantitat $-\frac{c}{a}$ és real, si exigim a més que sigui positiva, tindrem infinites solucions en el cercle de radi $-\frac{c}{a}$, això és, $z = \sqrt{-\frac{c}{a}}e^{i\varphi}$, amb φ arbitrari. Si $-\frac{c}{a}$ és negatiu, llavors no hi ha cap solució de (1).

Subcas $\bar{a}c - a\bar{c} \neq 0$

En aquest cas òbviament no hi ha solució.

Cas $b \neq 0$

Si $b \neq 0$, llavors a (4) podem aillar z_1 i substituir-ho en la primera equació de (3). El resultat és:

$$z_1 = \frac{1}{a\bar{b}}(\bar{a}bz + a\bar{c} - \bar{a}c) \qquad (6)$$

$$\bar{a}bz^2 + (a\bar{c} - \bar{a}c + b\bar{b})z + c\bar{b} = 0 \qquad (7)$$

Tenim, doncs, una equació de segon grau en z i podem trobar les solucions:

$$z = \frac{\bar{a}c - a\bar{c} - b\bar{b} \pm \sqrt{(a\bar{c} - \bar{a}c + b\bar{b})^2 - 4\bar{a}\bar{b}bc}}{2\bar{a}b}$$

que podem transformar en

$$z = \frac{\bar{a}c - a\bar{c} - b\bar{b} \pm \sqrt{(a\bar{c} + \bar{a}c - b\bar{b})^2 - 4a\bar{a}c\bar{c}}}{2\bar{a}b} \qquad (8)$$

on s'observa clarament que el radicand és real.

El problema sembla acabat, però no és així. Encara hem de substituir la z obtinguda a (6) per saber si la solució completa és o no solució de (1). Fent aquesta substitució resulta:

$$z_1 = \frac{a\bar{c} - \bar{a}c - b\bar{b} \pm \sqrt{(a\bar{c} + \bar{a}c - b\bar{b})^2 - 4a\bar{a}c\bar{c}}}{2a\bar{b}}$$

Tenint en compte que el radicand és real, veiem que $z_1 = \bar{z}$ si i només si el radicand és no negatiu. La condició, doncs, per què per a $b \neq 0$ l'equació (1) tingui dues solucions és:

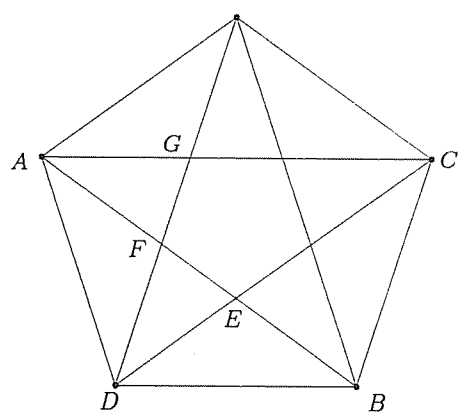
$$(a\bar{c} + \bar{a}c - b\bar{b})^2 - 4a\bar{a}c\bar{c} \geq 0$$

Observació final. Per al cas particular $c = 0$, la fórmula (8) dona les dues solucions obvies $z = 0$ i $z = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$.

* * *

A17. Considereu un pentàgon regular. Traçant les seves diagonals es forma al seu interior un nou pentàgon regular. Trobeu la raó entre les àrees dels dos pentàgons.

Solució (Jordi Saludes, UPC). Per simetria i comparació observem que a la figura següent hi ha tres menes de triangles isòsceles semblants: la classe del ΔABC, la del ΔEFD i la de ΔAED.



Podem observar que la base[5] d'un d'aquests triangles isòsceles és el costat del triangle immediatament inferior (per exemple, ED = base de ΔAED = costat de ΔEFD).

Si fem un compte de les mesures dels angles dels triangles, veurem de seguida que les tres classes de triangles considerades ho són de triangles semblants.

Per la semblança entre ΔAED i ΔEFD tenim $\frac{AE}{ED} = \frac{ED}{EF}$, però com que $ED = AF$, resulta $\frac{AE}{AF} = \frac{AF}{EF}$, i d'ací $\frac{EF}{AF} = \frac{AF}{AE}$, és a dir, que F parteix el segment AE per la raó àuria φ.[6] Així, doncs, qualsevol dels triangles isòsceles considerats té una relació costat/base igual a φ.

La relació entre el costat del pentàgon gros i el del petit és $\frac{BC}{EF} = \frac{BC}{BE} \cdot \frac{BE}{EF}$, però com que $BE = ED$, resulta que $\frac{BC}{EF} = \varphi^2 = 1 + \varphi$. Per tant, la relació entre les àrees dels dos pentàgons serà $(1+\varphi)^2 = \varphi^2 + 2\varphi + 1 = 3\varphi + 2$.

Altres solucions. Miguel Amengual (Cala Figuera, Mallorca) i Francesc Borrell (IES Salvador Espriu, Salt) han enviat solucions essencialment idèntiques a la publicada.

Miguel Amengual fa una lectura ampliada de l'enunciat: a més del cas d'un pentàgon convex, considera també el cas d'un pentàgon regular estrellat, en el qual troba que la relació entre l'àrea del pentàgon regular estrellat i la del pentàgon regular convex *petit* és igual a 2φ. La redacció, però, no sap quina interpretació donar de les *diagonals* del pentàgon regular estrellat.

* * *

A18. Calculeu la suma:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!$$

Solució (Maria Borrell, estudiant de primer d'enginyeria química a la UPC). Com a resultat previ que ens permetrà fer la suma demanada es pot observar que

$$n \cdot n! = (n+1)! - n!$$

Efectivament, $(n+1)! - n! = n! \cdot (n+1-1) = n! \cdot n$.

A partir d'aquesta igualtat podem escriure

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = \\
&= 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \ldots + (n+1)! - n! = \\
&= -1! + (n+1)! = \\
&= (n+1)! - 1.
\end{aligned}$$

Altres solucions. Miguel Amengual (Cala Figuera, Mallorca) prova que si el primer terme d'una progressió aritmètica $a_1, a_2, \ldots$ de raó o diferència d és $a_1 = 1$, llavors la suma

$$a_1 + 2a_1a_2 + 3a_1a_2a_3 + \cdots + na_1a_2\cdots a_n$$

és igual a $(a_1a_2\cdots a_na_{n+1} - 1)/d$. Fent $a_n = n$, s'obté la suma demanada.

* * *

A19. La funció zeta de Riemann, $\zeta(k)$, es defineix com la suma de la sèrie:

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^k}.$$

Demostreu que $\sum_{k=2}^{\infty}(\zeta(k) - 1) = 1$.

Solució (Francesc Borrell Thió, IES Salvador Espriu, Salt). Com que $\zeta(k) - 1 = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots$, podrem escriure:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty}(\zeta(k) - 1) &= \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots\right) = \\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right) + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3^k}\right) + \cdots = \\
&= \frac{1/4}{1/2} + \frac{1/9}{2/3} + \frac{1/16}{3/4} + \cdots = \\
&= \frac{1}{1\cdot 1} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

Ara bé, com que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, es pot veure que la suma parcial S_n de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ val $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ i, per tant,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty}(\zeta(k) - 1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \\
&= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,
\end{aligned}$$

com volíem demostrar.

[5] Indicarem com a *base* la longitud del costat no igual dels triangles i com a *costat* la longitud dels costats iguals.

[6] *Raó àuria.* Proporció entra dos segments tals que el més petit és al gran com el gran és a la suma de tots dos (*Diccionari general de la llengua catalana*, IEC).